

数学重点攻略ゼミ

因数分解

- | | |
|------|----------------------|
| 第1講 | 素因数分解 |
| 第2講 | 共通因数でくくる因数分解 |
| 第3講 | 因数分解の公式① |
| 第4講 | 因数分解の公式②、③、④ |
| 第5講 | 公式のまとめ |
| 第6講 | いろいろな因数分解 |
| 第7講 | 置き換えを用いる因数分解 |
| 第8講 | 複雑な因数分解 |
| 第9講 | 乗法公式・因数分解の利用 (計算の工夫) |
| 第10講 | 式による証明① |
| 第11講 | 式による証明② |



第1講

例題1

1から50までの数で、素数をすべてかきなさい。

例題2

次の数を素因数分解しなさい。

(1) 30 (2) 1050

例題3

120にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果ある数の平方となるようにしたい。どんな数をかければよいか求めなさい。
また、その結果どんな自然数の平方になるか。

Point

例題1 **素数**……1とその数自身でしか割り切ることのできない数（約数が2つ）

例題2 **素因数分解**……素数のみの積の形で表したもの

例題3 平方数（ある数の2乗）になっているものは、
必ず**2乗のみの積の形**で表すことができる。



Note

1-1 A

1から100までの数で、素数をすべてかきなさい。

1-2 A

次の数を素因数分解しなさい。

(1) 8 (2) 28 (3) 280 (4) 882

1-3 B

45にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果ある数の平方となるようにしたい。
どんな数をかければよいか求めなさい。また、その結果どんな自然数の平方になるか。

1-4 B

56にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果ある数の平方となるようにしたい。
どんな数をかければよいか求めなさい。また、その結果どんな自然数の平方になるか。

1-5 C

180をできるだけ小さい自然数でわって、商がある自然数の平方になるようにしたい。
どんな数でわればよいか。すべて求めなさい。

第2講

例題 1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax + bx$

(2) $x^3 - x^2y + 2x$

例題 2

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2y - 6xy$

(2) $3x^3 - 6x^2 + 9x$

Point

因数分解……多項式をいくつかの因数の積で表すこと

因数分解の基本は共通因数でくくること



Note

例題 1 <https://wp.me/p8O4vd-Y1>

(1) $ax + bx$

(2) $x^3 - x^2y + 2x$

例題 2 <https://wp.me/p8O4vd-Y4>

(1) $2x^2y - 6xy$

(2) $3x^3 - 6x^2 + 9x$

1 - 1 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ay + by$

(2) $ab - 5b$

(3) $x^2 + xy$

(2) $m^2 - 5mn$

1 - 2 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $8xy + 4xz$

(2) $3m^2n - 15mn^2$

(3) $8a^2b - 12ab^2$

(4) $3ax^2y + 6bxy^2$

1 - 3 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $6ax + 4ay - 2xz$

(2) $24a^2b - 12abc - 18ab^2$

第3講

例題1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 8x + 15$

(2) $x^2 - x - 20$

例題2

次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2 - 13ab + 42b^2$

(2) $x^2 + 6xy + 8y^2$

Point

因数分解の公式①

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$x^2 + \bigcirc x + \Delta$ 型は**たして、かけて!** たして \bigcirc 、かけて Δ になる2数を見つける。



Note

例題1 <https://wp.me/p8O4vd-Y7>

(1) $x^2 + 8x + 15$

(2) $x^2 - x - 20$

例題2 <https://wp.me/p8O4vd-Ya>

(1) $a^2 - 13ab + 42b^2$

(2) $x^2 + 6xy + 8y^2$

2-1 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 8x + 12$

(2) $x^2 + 3x - 10$

(3) $x^2 - 13x - 30$

(4) $x^2 - 12x + 27$

2-2 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 9xy + 20y^2$

(2) $x^2 - xy - 56y^2$

(3) $a^2 + 3ab - 28b^2$

(4) $m^2 - 11mn + 18n^2$

第4講

例題1 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 + 6x + 9 \qquad (2) \quad x^2 + 18xy + 81y^2$$

例題2 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 - 8x + 16 \qquad (2) \quad x^2 - 12xy + 36y^2$$

例題3 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad 4x^2 - 20x + 25 \qquad (2) \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

例題4 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 - 9 \qquad (2) \quad 36a^2 - 25b^2$$

Point

因数分解の公式

$$\textcircled{2} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\textcircled{3} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\textcircled{4} \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



両端に平方数（ある数の2乗）がきていたら、公式②、③を疑って真ん中チェック！

Note

例題1 <https://wp.me/p8O4vd-Yd>

$$(1) \quad x^2 + 6x + 9 \qquad (2) \quad x^2 + 18xy + 81y^2$$

例題2 <https://wp.me/p8O4vd-Yh>

$$(1) \quad x^2 - 8x + 16 \qquad (2) \quad x^2 - 12xy + 36y^2$$

例題3 <https://wp.me/p8O4vd-Yk>

$$(1) \quad 4x^2 - 20x + 25$$

$$(2) \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

例題4 次の式を因数分解しなさい。 <https://wp.me/p8O4vd-Yn>

$$(1) \quad x^2 - 9 \qquad (2) \quad 36a^2 - 25b^2$$

4-1 A

次の式を因数分解しなさい

(1) $x^2 + 10x + 25$

(2) $x^2 - 18x + 81$

(3) $x^2 - 2xy + y^2$

(4) $a^2 + 26ab + 169b^2$

4-2 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $16a^2 - 72a + 81$

(2) $36x^2 + 12x + 1$

(3) $25x^2 + 60xy + 36y^2$

(4) $9m^2 - 42mn + 49n^2$

4-3 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 25$

(2) $a^2 - 1$

(3) $16x^2 - 49y^2$

(4) $25a^2 - 64b^2$

例題

次の式を因数分解しなさい。

(1) $16x^2 - 8x + 1$

(2) $x^2 + 10xy + 16y^2$

(3) $3x^2 + 12xy + 6y^2$

(4) $49a^2 - 36b^2$

(5) $25x^2 + 20xy + 4y^2$

Point

因数分解の公式

① $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

② $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

③ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

④ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$



Note

<https://wp.me/p8O4vd-Yq>

(1) $16x^2 - 8x + 1$

(2) $x^2 + 10xy + 16y^2$

(3) $3x^2 + 12xy + 6y^2$

(4) $49a^2 - 36b^2$

(5) $25x^2 + 20xy + 4y^2$

5-1 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2m^2 + 6mn$

(2) $x^2 + 7x + 12$

(3) $x^2 + 12x + 36$

(4) $y^2 - 6y + 9$

(5) $25x^2 - 16$

5-2 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $m^2 + 3mn + 2n^2$

(2) $9x^2 - 4y^2$

(3) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(4) $a^2 + 20a + 100$

(5) $5x^2 - 15xy + 10z$

5-3 A

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 1$

(2) $121x^2 + 44x + 4$

(3) $4x^2y^2 - 20xy + 25$

(4) $7m^2 - 14m + 14$

(5) $x^2 + 2xy - 35y^2$

5-4 B

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

(2) $x^2 + xy - 42y^2$

(3) $12x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3$

(4) $0.01a^2 - 0.64b^2$

(5) $\frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2$

例題

次の式を因数分解しなさい。

(1) $16a^2 - 100$

(2) $2x^2 + 16x + 24$

(3) $3ax^2 + 12ax + 12a$

(4) $20mx^2 - 60mxy + 45my^2$



Point

因数分解を考える手順

① 共通因数がないかチェック

② 公式が使えるかチェック

※必ずまだ因数分解ができないかチェック！



Note

<https://wp.me/p8O4vd-Yt>

(1) $16a^2 - 100$

(2) $2x^2 + 16x + 24$

(3) $3ax^2 + 12ax + 12a$

(4) $20mx^2 - 60mxy + 45my^2$

例題1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+2)^2 - 8(x+2) + 16$

(2) $a(x-y) - b(x-y)$

(3) $(x+y)^2 + 5(x+y) + 4$

(4) $(3a+b)^2 - (a-2b)^2$



例題2

次の式を因数分解しなさい。

$(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12$

Point

複雑に見える因数分解は、共通部分やかたまりを文字で置くとよい。

Note

例題1 <https://wp.me/p8O4vd-Yw>

(1) $(x+2)^2 - 8(x+2) + 16$

(2) $a(x-y) - b(x-y)$

(3) $(x+y)^2 + 5(x+y) + 4$

(4) $(3a+b)^2 - (a-2b)^2$

例題2 <https://wp.me/p8O4vd-Yz>

$(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12$

7-1 B

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x-3)^2 + 5(x-3) + 6$

(2) $x(2a+b) + y(2a+b)$

(3) $(5x+2y)^2 - (3x+2y)^2$

(4) $(2x+3y)^2 + 4(2x+y) + 4$

7-2 B

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x^2 - 3x)^2 - 4$

(2) $(x^2 - 2x)^2 - 18(x^2 - 2x) + 45$

第8講

例題1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2 + ab - a - b$ (2) $xy + y - 3x - 3$

例題2

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^4 - 16$ (2) $x^4 - 13x^2 + 36$

Point

ある部分だけ因数分解をすることによって、共通因数をつくりだしたり、公式が使えたりする。
4乗が式にあるものは、2乗を文字で置いてみると良い。

Note

例題1 <https://wp.me/p8O4vd-YC>

(1) $a^2 + ab - a - b$

(2) $xy + y - 3x - 6$

例題2

(1) $x^4 - 16$

(2) $x^4 - 13x^2 + 36$

8-1 C

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 9$

(2) $xy + bx - ab - ay$

(3) $9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

(4) $a^2 + ab + 3a + 2b + 2$

8-2 C

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^4 - 1$

(2) $(a^2 + 3)^2 - 9a^2$

(3) $x^4 - 2x^2 + 1$

(4) $a^8 - b^8$

第9講

例題1

次の計算をなさい。

(1) $2021^2 - 2020^2$

(2) 101^2

(3) 98^2

(4) 205×195

例題2

$x = 28$, $y = 72$ のとき、 $x^2 + 2xy + y^2$ の値を求めなさい。

例題3

$x + y = 8$, $xy = 15$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めなさい。

Point

乗法公式や因数分解を利用することにより、計算を楽にすることができる。

Note

例題1 <https://wp.me/p8O4vd-YJ>

(1) $2021^2 - 2020^2$

(2) 101^2

(3) 98^2

(4) 205×195

例題2

$x = 28$, $y = 72$ のとき、 $x^2 + 2xy + y^2$ の値

例題3 <https://wp.me/p8O4vd-YM>

$x + y = 8$, $xy = 15$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値

9-1 A

次の計算をなさい。

(1) $13^2 - 7^2$

(2) 105^2

(3) 99^2

(4) 103×97

9-2 A

次の問いに答えなさい。

(1) $x = 18$, $y = -2$ のとき $x^2 - 7xy + 12y^2$ の値を求めなさい。

(2) $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ のとき、 $9a^2 + 12ab + 4b^2$ の値を求めなさい。

9-3 B&C

次の問いに答えなさい。

(1) $x + y = 7$, $xy = 10$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めなさい。

(2) $x + y = 6$, $xy = 3$ のとき、 $x^2 + 3xy + y^2$ の値を求めなさい。

(3) $x - y = 4$, $xy = 3$ のとき、 $x^2 - xy + y^2$ の値を求めなさい。

第 10 講

例題 1

連続する 3 つの整数の最大の整数と最小の整数の積に 1 を加えると、中央の整数の平方になる。このことを説明しなさい。

例題 2

2 つの奇数の積から 1 をひくと偶数になる。このことを説明しなさい。

Point

整数問題の証明のすすめ方

- ①何を文字で置いたのか必ずかく。
- ②問題文の通りに式をたて、展開や因数分解を利用し結論を導く。



Note

(1) https://youtu.be/y5T_bxXKM9I?list=PL7QoxirWbzF21hBfBUTRE6ka1ud-QwRt0

(2)

10-1 C

(1) 連続する2つの整数では大きいほうの整数の平方から2つの整数の和をひいた数は小さいほうの整数の平方になる。このことを説明しなさい。

(2) 連続する3つの整数では、それぞれの整数の平方の和から5をひいた数は最大の整数と最小の整数の積3倍に等しい。このことを説明しなさい。

10-2 C

(1) 連続した2つの偶数の平方の和は4の倍数になる。このことを説明しなさい。

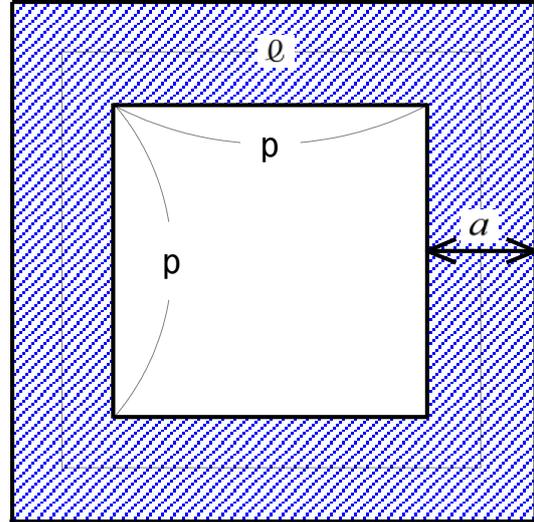
(2) 連続する2つの奇数の積に1を加えると偶数の平方になる。このことを説明しなさい。

10-3 C

5でわると3余る数の平方を5でわったときの余りを求めなさい。

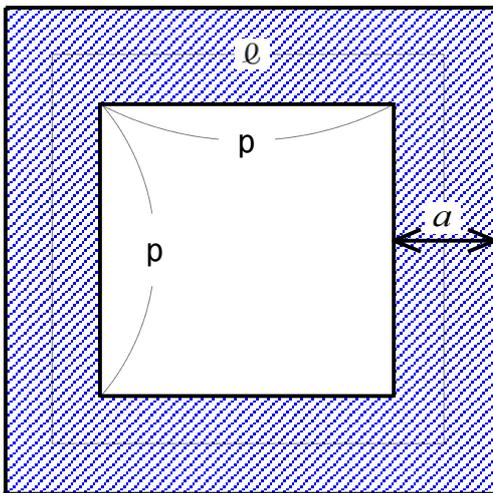
例題

図の色がついた部分の面積を S とする。色がついた部分の真ん中を通る線の長さを l 、色がついた部分の幅を a とするとき、 $S = al$ であることを示せ。



Note

<https://wp.me/p8O4vd-au>



11-1 C

図の色がついた部分の面積を S とする。色がついた部分の真ん中を通る線の長さを l 、色がついた部分の幅を a とするとき、 $S = al$ であることを示せ。ただし、四つ角は円の一部になっているものとする。

<https://wp.me/p8O4vd-ax>

